Che cos'è la logica?

Quando conversiamo non c'è niente di più naturale che argomentare su qualcosa. Quando argomentiamo cerchiamo di convincere la persona con cui stiamo discutendo che abbiamo ragione, che la nostra conclusione segue da qualcosa che il nostro interlocutore ha in precedenza accettato. Sarebbe un bel problema se non potessimo stabilire quando una cosa segue da un'altra. Spesso nella conversazione viene considerato come un argomento qualcosa che non lo è per niente.

Questa argomentazione, ovviamente, non ha alcun valore, perché non c'è niente che collega la verità della conclusione alla verità delle premesse che dovrebbero sostenerla. Ciò di cui abbiamo bisogno è garantire che la verità delle premesse venga conservata dall'argomentazione. La logica è semplicemente lo studio delle *argomentazioni che conservano la verità*.

LA LOGICA

è la scienza dell'argomentazione rigorosa.
Oggetto di studio della logica è il ragionamento, le sue procedure e i suoi stili.

Recupero debito – Lezione Prof. Giovanni Giuffrida

RUOLO DELLA LOGICA

1. *Roma è la capitale d'Italia; questo aereo atterra a Roma; quindi quest'aereo atterra in Italia*
2. *Mosca è la capitale degli USA; quindi tu non puoi andare a Mosca senza andare in USA*

- ✓ Le «premesse» prima del «quindi»
- ✓ Le «conclusioni» dopo il «quindi»

RUOLO DELLA LOGICA

- Non abbiamo difficoltà a confermare la veridicità della prima frase
- Se Mosca fosse stata la capitale degli USA anche la seconda conclusione sarebbe stata vera…
  - Logicamente corretto, ma banalmente falso
- **La logica si occupa del «ragionamento»**
  - Verificare la veridicità delle premesse è compito di qualcun’altro
- Un’inferenza si dice «corretta» se la conclusione deriva **logicamente** dalle sue premesse

- *Ruolo fondamentale della logica è quindi di modellare la «correttezza» delle inferenze*

Studiare gli enunciati

Il filosofo greco **Aristotele** (384-322 a.C.) fu il primo a fornirci l'idea di uno strumento (*organon*) per argomentare in maniera convincente. Questo studio include la grammatica, la retorica e una teoria dell'interpretazione, e anche la logica. La prima cosa che Aristotele prese in considerazione furono gli enunciati.

1. Individuali:	Socrate è un uomo.
2. Universali:	Ogni uomo è mortale.
3. Particolari:	Alcuni uomini sono mortali.

L'oggetto di cui stiamo parlando (i nomi, come *Socrate* e *tavoli*; i nomi astratti come *il camminare*; e i pronomi come *qualcuno* o *tutti*) è detto da Aristotele **soggetto** dell'enunciato.

Aristotele chiama **predicato** tutto ciò che diciamo riguardo al soggetto dell'enunciato (per esempio, verbi come *sta mangiando* o *è caduto*; aggettivi come *è difficile*; nomi come *uomo* in frasi tipo "Socrate è un uomo").

LE ORIGINI… GLI ENUNCIATI

- Aristotele, il filosofo greco che per primo ha teorizzato compiutamente la Logica
- Gli enunciati (o proposizioni) devono sempre essere verificabili: Vero o Falso.
- Non tutte le frasi normali sono enunciati

ALCUNI ESEMPI PRATICI

Frasi come "Mosca si trova in Russia", "Giulio Cesare è morto", "Dante era uno scrittore", sono enunciati (o proposizioni).

Frasi come "Viva l'Italia" non sono enunciati.

- Soltanto le frasi che asseriscono un fatto possono essere definite enunciati, le altre no.
- La veridicità degli enunciati dev'essere verificabile

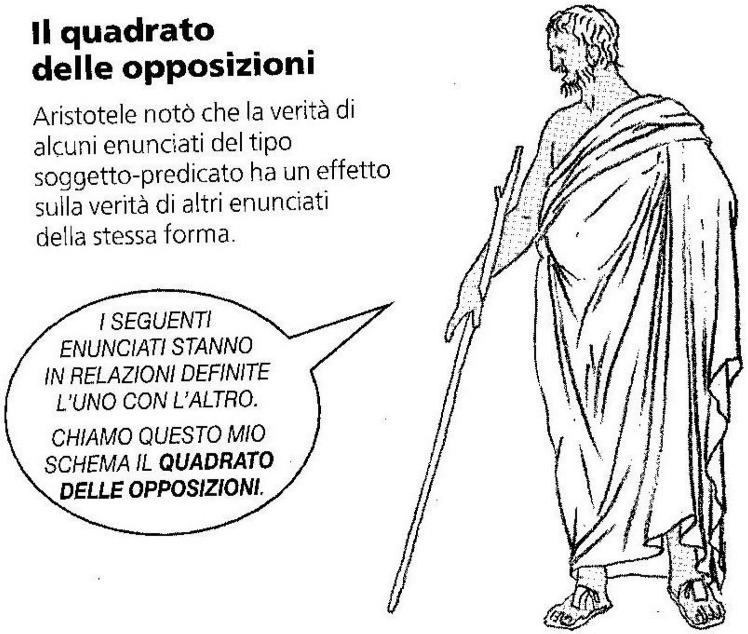
E QUESTO È UN ENUNCIATO?

Soffermiamoci sulle caratteristiche degli enunciati. Qualche esempio? Di seguito trovi elencate alcune frasi del linguaggio. Ma soltanto alcune di esse sono enunciati. Prova a capire quali.

1. Antonio ha i capelli scuri
2. La finestra è chiusa
3. Non penso sia giusto che tu lo faccia
4. Questa festa è veramente noiosa
5. Che ore sono?

Il quadrato delle opposizioni

Aristotele notò che la verità di alcuni enunciati del tipo soggetto-predicato ha un effetto sulla verità di altri enunciati della stessa forma.



1. TUTTI GLI UOMINI SONO MORTALI

2. TUTTI GLI UOMINI NON SONO MORTALI

3. ALCUNI UOMINI SONO MORTALI

4. ALCUNI UOMINI NON SONO MORTALI

Gli enunciati **1** e **2** non possono essere entrambi veri.

Gli enunciati diagonali **1** e **4** si dicono contraddittori. Finché ci sono degli uomini uno di questi deve essere vero, ma non si dà mai il caso che lo siano entrambi: la verità dell'uno garantisce la falsità dell'altro.

Lo stesso vale per gli enunciati diagonali **2** e **3**.

Se l'enunciato **3** è falso, è falso anche **1**; ma possono essere veri entrambi. Se **1** è vero, allora è vero anche **3**; ma non vale l'inverso.

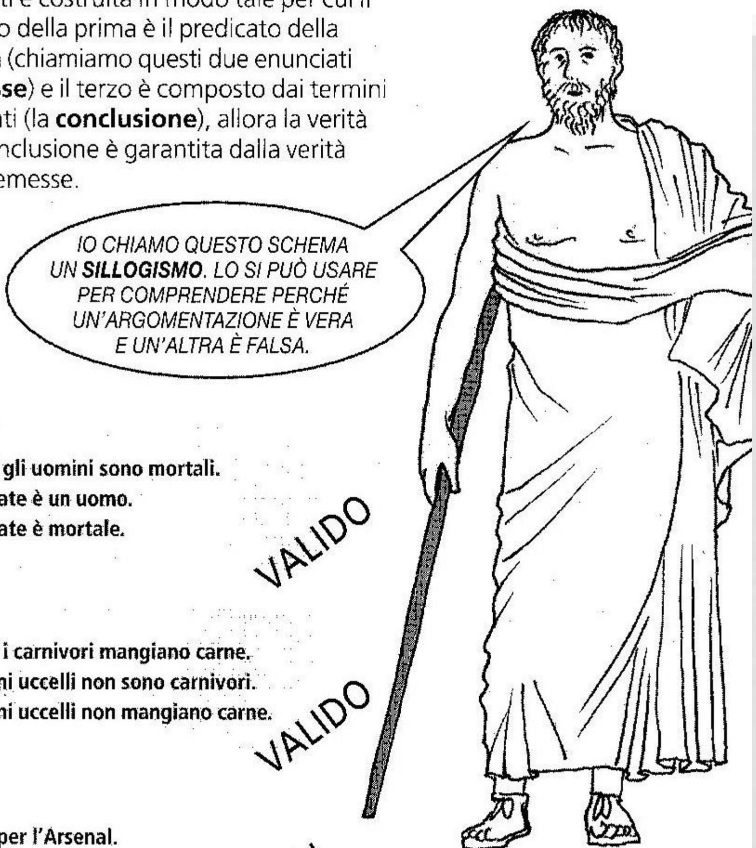
Lo stesso per **2** e **4**. Si tratta della stessa relazione che vale tra "**Tutti gli uomini sono mortali**" e "**Socrate è mortale**".

RELAZIONI TRA ENUNCIATI

- Gli enunciati sono «logicamente» in relazione tra loro
- Ciò che è in relazione in effetti è la veridicità delle diverse forme

Il sillogismo

Grazie al quadrato delle opposizioni, Aristotele notò un fatto curioso. Prendiamo un enunciato come "Socrate è un uomo". Se un'argomentazione composta da tre enunciati è costruita in modo tale per cui il soggetto della prima è il predicato della seconda (chiamiamo questi due enunciati **premesse**) e il terzo è composto dai termini rimanenti (la **conclusione**), allora la verità della conclusione è garantita dalla verità delle premesse.



1. Tutti gli uomini sono mortali.
2. Socrate è un uomo.
3. Socrate è mortale.

VALIDO

1. Tutti i carnivori mangiano carne.
2. Alcuni uccelli non sono carnivori.
3. Alcuni uccelli non mangiano carne.

VALIDO

1. Tifo per l'Arsenal.
2. Bergkamp gioca nell'Arsenal.
3. L'Arsenal vincerà il campionato.

NON VALIDO

Aristotele non ha considerato enunciati condizionali che hanno più di un predicato come, per esempio:

"**Se Socrate è un uomo, allora Socrate è mortale**".

SILLOGISMO

1. Tutti gli uomini sono mortali
2. Socrate è un uomo
3. Quindi: Socrate è mortale

- In pratica: una certa struttura delle due premesse "garantisce" la veridicità della conclusione

DUE FORME DI RAGIONAMENTO INFERENZIALE

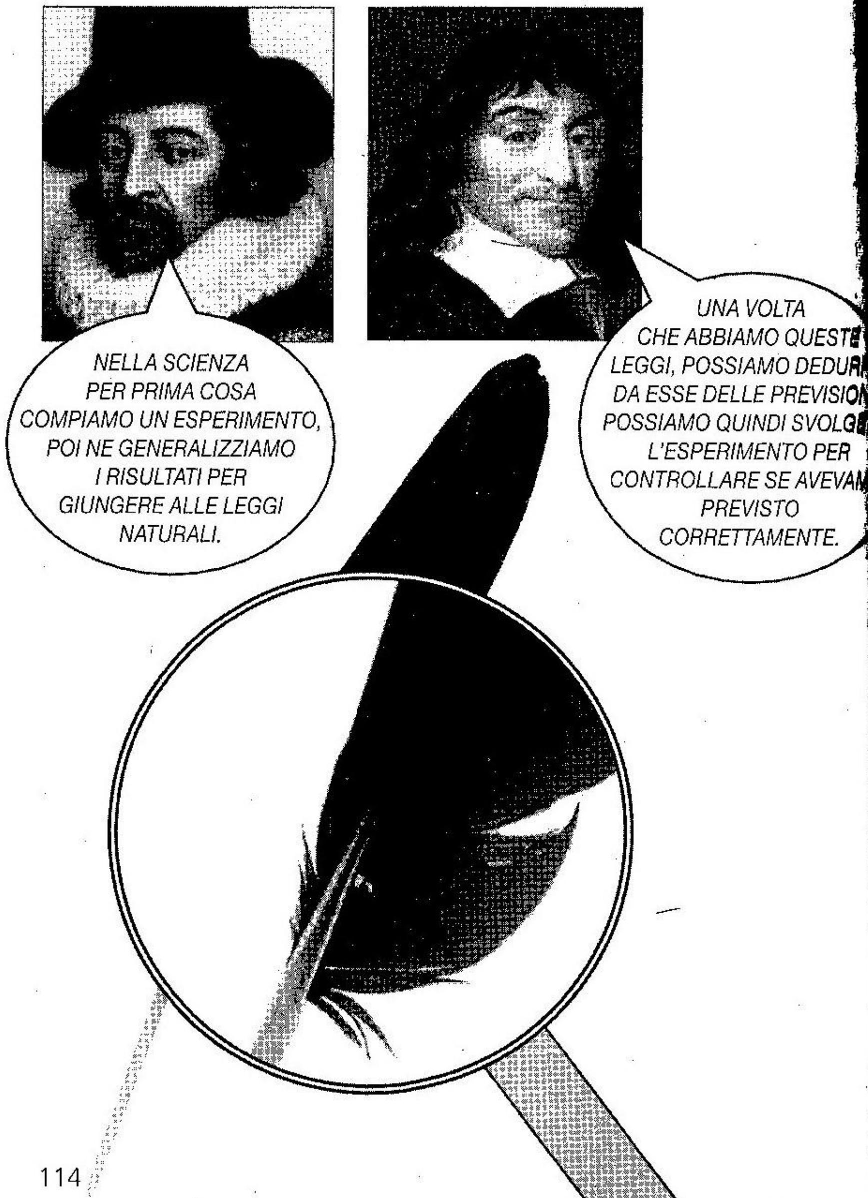
- Consideriamo le tre inferenze seguenti:
  1. «Se il ladro fosse entrato dalla finestra della cucina ci sarebbero state delle impronte fuori; non c'erano impronte fuori; quindi il ladro non è entrato dalla finestra della cucina»
  2. «Franco ha le mani macchiate di nicotina; quindi Franco è un fumatore»
  3. «Franco compra due pacchetti di sigarette al giorno; quindi qualcuno ha lasciato delle impronte fuori dalla cucina»

DUE FORME DI RAGIONAMENTO INFERENZIALE

- La 1 è «deduttivamente» valida
  - Se le premesse sono vere, sicuramente la conclusione è vera
  - O, in altre parole, le premesse non posso essere vere senza che la conclusione sia anche vera
- La 2 è «induttivamente» valida
  - Le premesse danno ottime ragioni per credere che la conclusione sia vera, ma non del tutto
  - Cioè, non possiamo dedurre che la conclusione sia valida ma siamo indotti a pensarlo
- La 3 è invalida
  - Le premesse non offrono nessun supporto per la conclusione
  - Invalida sia deduttivamente che induttivamente
  - Forse manca qualche altra premessa

I metodi della deduzione e dell'induzione

I metodi di Galileo divennero la metodologia della scienza, sviluppata dai filosofi **Francis Bacon** ovvero **Bacone** (1561-1626) e René Descartes ovvero Cartesio.



Cartesio e Bacone incarnano due modi diversi di ragionamento, la *deduzione* e l'*induzione*. Detto sommariamente, la deduzione è il metodo usato per mostrare che una teoria segue da un'altra. L'induzione è il metodo per inferire una regola generale da pochi casi.

I problemi dell'induzione

Nella deduzione la verità della conclusione segue dalla verità della premessa. Dell'induzione non possiamo dire lo stesso. Che i due corvi siano neri non contraddice il fatto che esiste in Giappone un corvo bianco. Tuttavia, la regola generale che "Tutti i corvi sono neri" è contraddetta dall'esistenza di un solo corvo bianco!

116

INDUZIONE

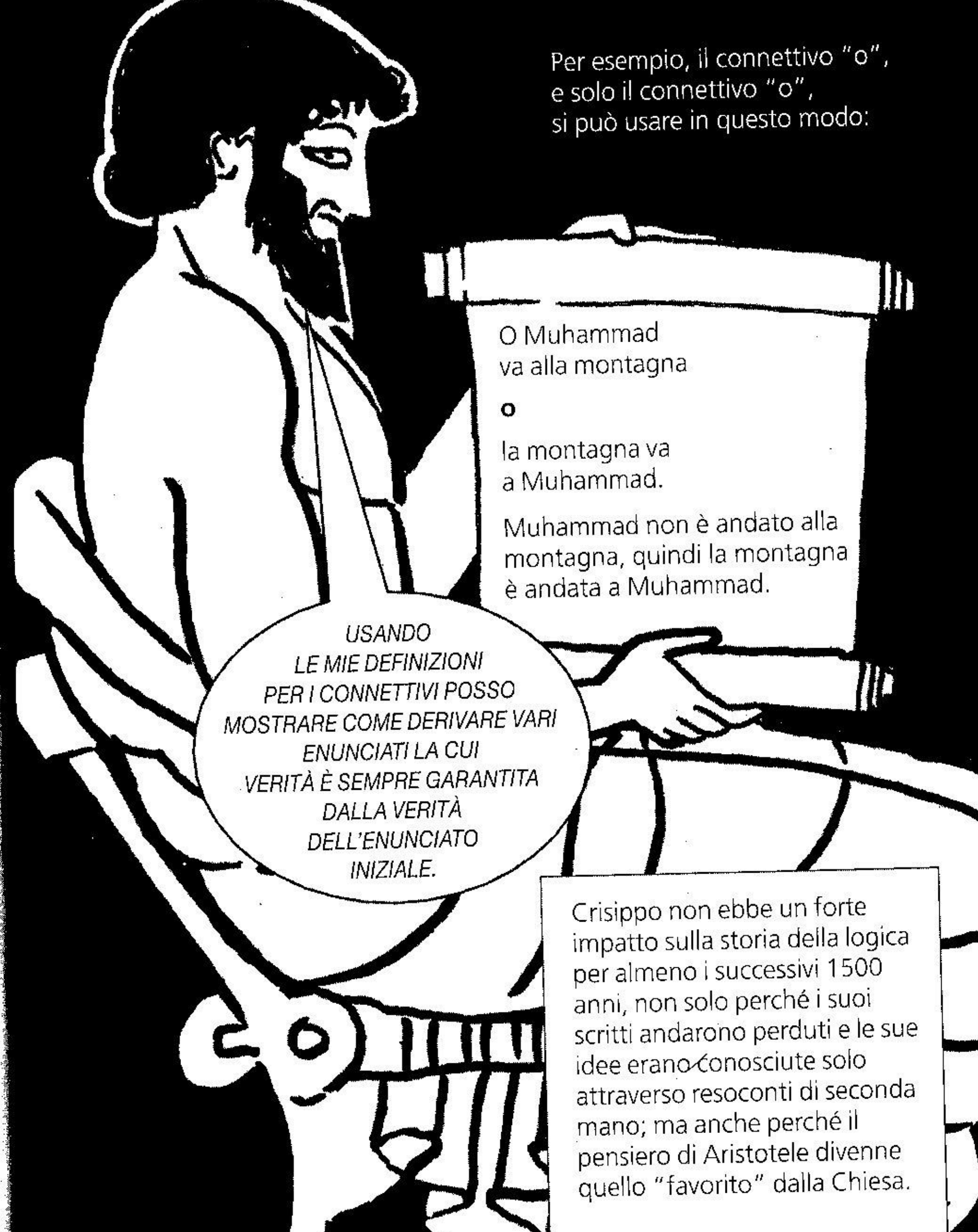
- Processo cognitivo molto naturale per gli essere umani
- Pratica comune nella vita di tutti i giorni
- Presenta comunque dei problemi… e non sempre ben accettato dagli scienziati

Logica dei connettivi

Circa un centinaio di anni più tardi, **Crisippo di Soli** (ca. 280 - ca. 206 a.C.) spostò l'attenzione della logica dagli enunciati semplici che hanno la forma soggetto-predicato a quelli complessi come "Socrate è un uomo e Zenone è un uomo". Questa fu una conquista importante. Si disse, allora, che "Se gli dei avessero usato la logica, sarebbe stata la logica di Crisippo". Lo stesso vale, come vedremo, anche per gli esseri umani; ma ci sono voluti due millenni per rendersene conto.

Ognuno di questi *connettivi* ha il suo modo specifico di combinare la verità delle parti in quella del tutto.

Per esempio, il connettivo "o", e solo il connettivo "o", si può usare in questo modo:

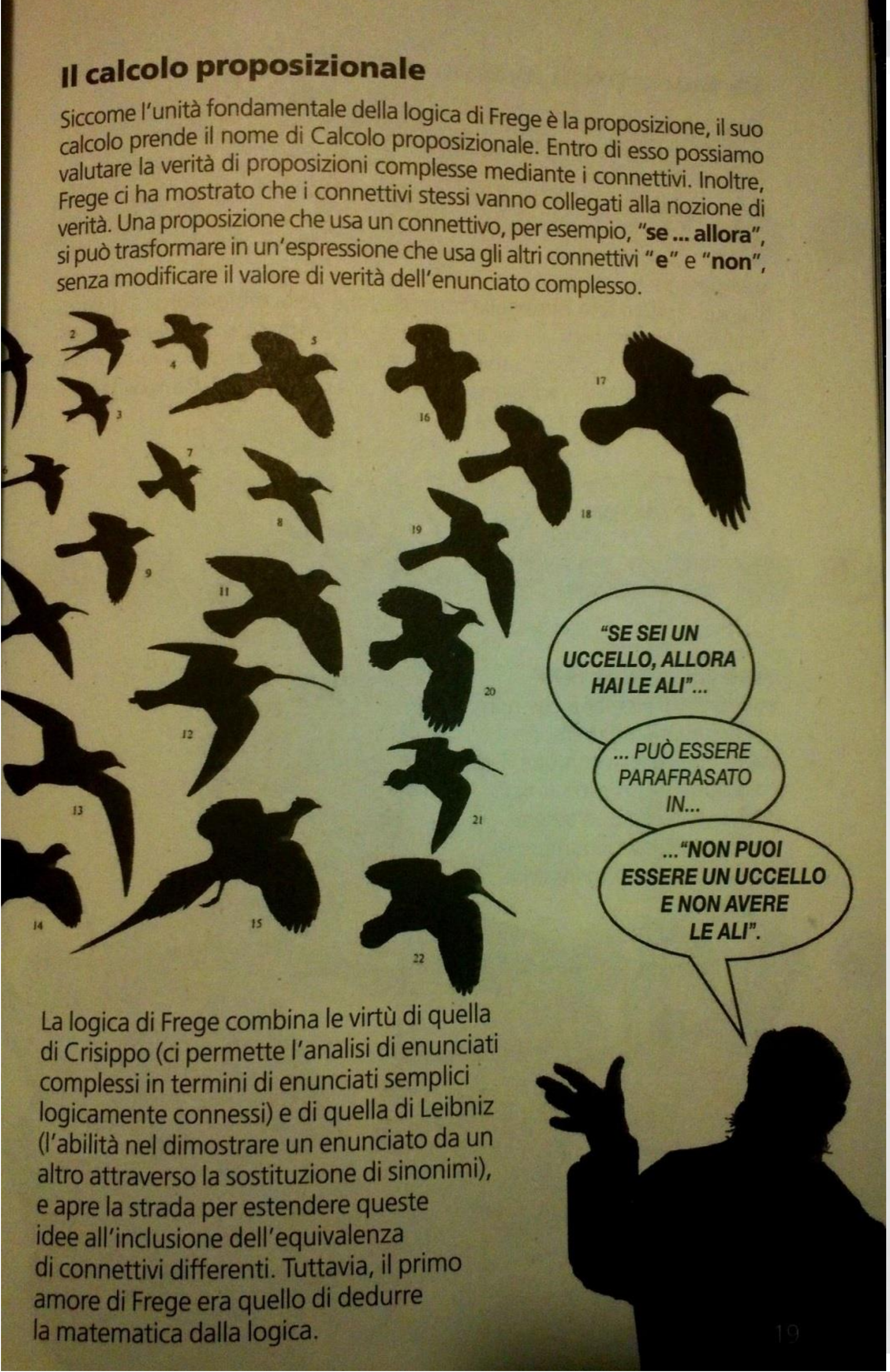


Crisippo non ebbe un forte impatto sulla storia della logica per almeno i successivi 1500 anni, non solo perché i suoi scritti andarono perduti e le sue idee erano conosciute solo attraverso resoconti di seconda mano; ma anche perché il pensiero di Aristotele divenne quello "favorito" dalla Chiesa.

LA LOGICA DELLE PROPOSIZIONI

- Una **proposizione** è una espressione matematica o verbale che può assumere i valori vero (*V*) o falso (*F*)
  - “3 è un numero primo” è una proposizione vera.
  - “3-2=5” è una proposizione falsa.
  - «Roma è la capitale d’Italia» è una proposizione vera.
  - “7 è un bel numero” non è una proposizione in senso matematico, in quanto non si può stabilire se è vera o falsa.
- Possiamo utilizzare delle variabili (p, q, r, etc.) al posto delle proposizioni: p = “3 è un numero primo”, q = «Roma è la capitale d’Italia»

CONNETTIVI LOGICI



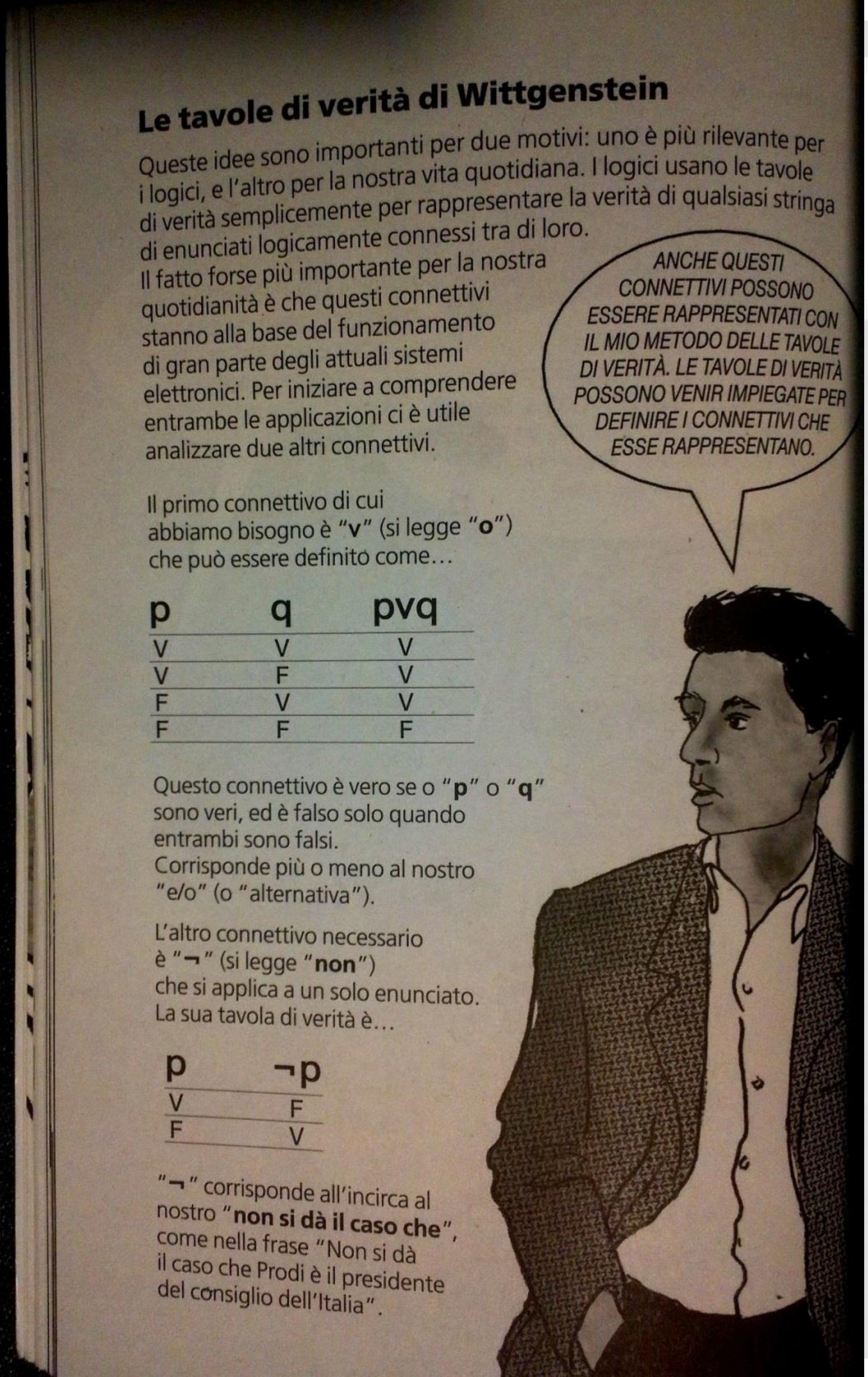
Il calcolo proposizionale

Siccome l'unità fondamentale della logica di Frege è la proposizione, il suo calcolo prende il nome di Calcolo proposizionale. Entro di esso possiamo valutare la verità di proposizioni complesse mediante i connettivi. Inoltre, Frege ci ha mostrato che i connettivi stessi vanno collegati alla nozione di verità. Una proposizione che usa un connettivo, per esempio, **"se ... allora"**, si può trasformare in un'espressione che usa gli altri connettivi **"e"** e **"non"**, senza modificare il valore di verità dell'enunciato complesso.

La logica di Frege combina le virtù di quella di Crisippo (ci permette l'analisi di enunciati complessi in termini di enunciati semplici logicamente connessi) e di quella di Leibniz (l'abilità nel dimostrare un enunciato da un altro attraverso la sostituzione di sinonimi), e apre la strada per estendere queste idee all'inclusione dell'equivalenza di connettivi differenti. Tuttavia, il primo amore di Frege era quello di dedurre la matematica dalla logica.

- Ci permettono di estendere il modello delle proposizioni…
- Il calcolo proposizionale permette quindi di creare modelli inferenziali piu` complessi

TAVOLE DI VERITÀ



Le tavole di verità di Wittgenstein

Queste idee sono importanti per due motivi: uno è più rilevante per i logici, e l'altro per la nostra vita quotidiana. I logici usano le tavole di verità semplicemente per rappresentare la verità di qualsiasi stringa di enunciati logicamente connessi tra di loro.
Il fatto forse più importante per la nostra quotidianità è che questi connettivi stanno alla base del funzionamento di gran parte degli attuali sistemi elettronici. Per iniziare a comprendere entrambe le applicazioni ci è utile analizzare due altri connettivi.

Il primo connettivo di cui abbiamo bisogno è "**v**" (si legge "**o**") che può essere definito come…

p	q	pvq
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Questo connettivo è vero se o "**p**" o "**q**" sono veri, ed è falso solo quando entrambi sono falsi.
Corrisponde più o meno al nostro "e/o" (o "alternativa").

L'altro connettivo necessario è "**¬**" (si legge "**non**") che si applica a un solo enunciato.
La sua tavola di verità è…

p	¬p
V	F
F	V

"**¬**" corrisponde all'incirca al nostro "**non si dà il caso che**", come nella frase "Non si dà il caso che Prodi è il presidente del consiglio dell'Italia".

- Metodo esaustivo per descrivere proposizioni complesse
- Si calcolano tutte le possibili combinazioni V/F di tutte le proposizioni coinvolte
- L'ultima colonna indica la veridicità della proposizione da calcolare nei vari casi

DISGIUNZIONE DI DUE PROPOSIZIONI

- L'«OR» di due proposizioni *p* e *q* è la proposizione *p* v *q* che risulta vera quando o *p* o *q* sono vere (basta una delle due). Falsa quando entrambe *p* e *q* sono false.
- Si chiama «Disgiunzione»
- Vediamo la «tabella di verità» della disgiunzione:

P	Q	P v Q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

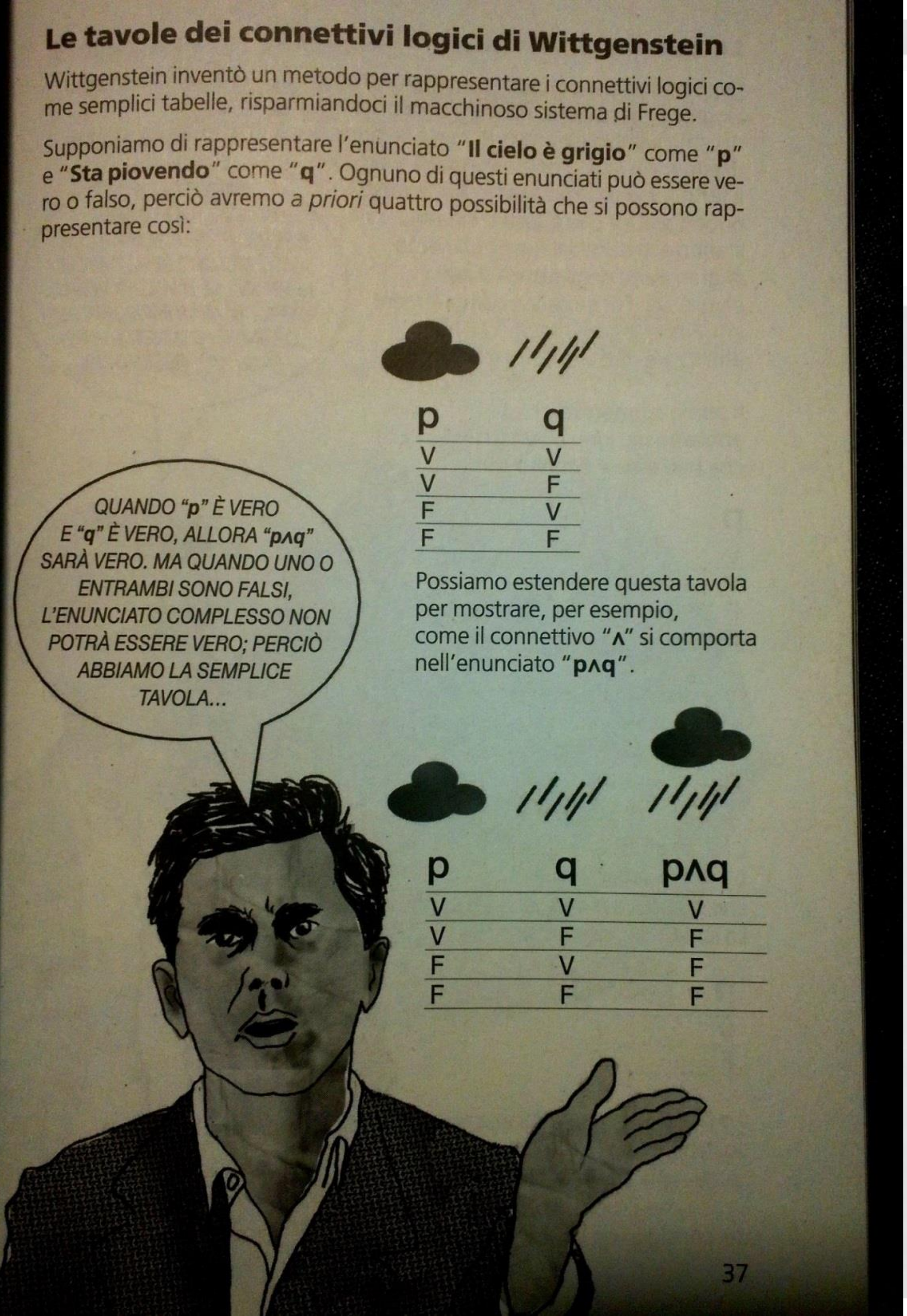
- **P = «Franco ha 35 anni»**
- **Q = «Franco ha gli occhi scuri»**
- **P v Q è vera se Franco ha 35 anni <u>oppure</u> gli occhi scuri (o entrambe)**

NEGAZIONE DI UNA PROPOSIZIONE

- Il «NOT» di una proposizione *p* è la proposizione ¬*p* che risulta vera quando *p* è falsa e viceversa.
- Si chiama «Negazione»
- è un operatore «unario»

P	¬P
F	V
V	F

- **P = «Franco ha 35 anni»**
- **¬ P è vera solo se Franco non ha 35 anni**



Le tavole dei connettivi logici di Wittgenstein

Wittgenstein inventò un metodo per rappresentare i connettivi logici come semplici tabelle, risparmiandoci il macchinoso sistema di Frege.

Supponiamo di rappresentare l'enunciato "**Il cielo è grigio**" come "**p**" e "**Sta piovendo**" come "**q**". Ognuno di questi enunciati può essere vero o falso, perciò avremo *a priori* quattro possibilità che si possono rappresentare così:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Possiamo estendere questa tavola per mostrare, per esempio, come il connettivo "**∧**" si comporta nell'enunciato "**p∧q**".

p	q	p∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

UTILIZZO DELLE TAVOLE DI VERITÀ

- Il meccanismo delle tavole di verità è facilmente riproducibile in circuiti elettronici
- Hanno rappresentato la base per lo sviluppo dei sistemi di Intelligenza Artificiale
  - Modellano il ragionamento tramite uso di sistemi elettronici binari (basati su on/off)

CONGIUNZIONE DI DUE PROPOSIZIONI

- L'«AND» di due proposizioni *p* e *q* è la proposizione $p \land q$ che risulta vera se e solo se sia *p* che *q* sono vere. Falsa in tutti gli altri casi.
- Si chiama «Congiunzione»

P	Q	P ∧ Q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

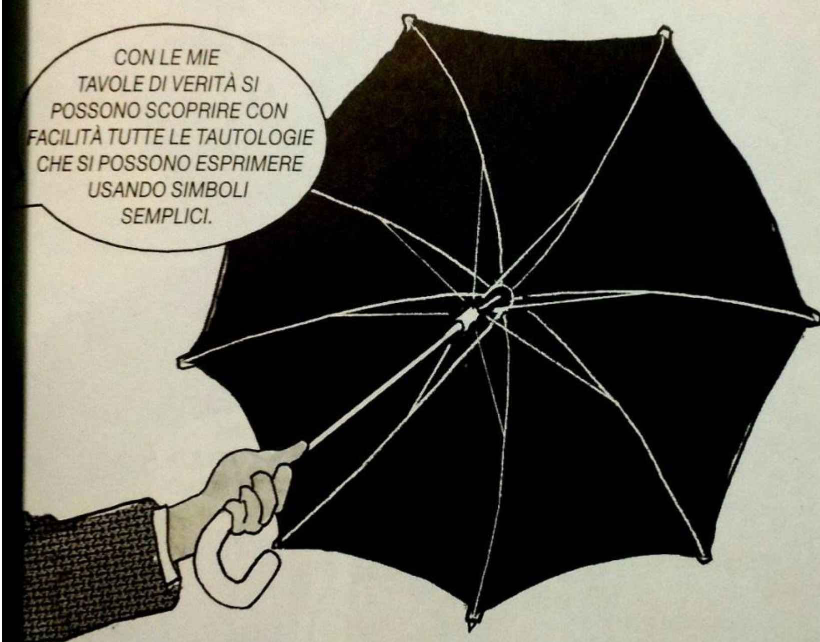
- **P = «Franco ha 35 anni»**
- **Q = «Franco ha gli occhi scuri»**
- **P ∧ Q è vera se Franco ha 35 anni <u>e</u> gli occhi scuri**

Scoprire le tautologie

I simboli logici possono essere combinati: ciò ci aiuta a calcolare le condizioni di verità di qualsiasi enunciato complesso. Per esempio, "**$p \vee \neg p$**" ha la seguente tavola di verità:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Quando una formula ha sempre sotto di essa la **V** di vero, significa che è vera in tutte le situazioni. L'enunciato "**O sta piovendo o non sta piovendo**" non può essere falso. Per i logici, questa è una *tautologia*.



In una tautologia una verità segue da un'altra necessariamente, solo in forza della sintassi logica. In questo modo sappiamo che qualsiasi enunciato che ha la stessa sintassi logica sarà sempre vero. Questo è importante per la teoria della dimostrazione, poiché ci fornisce una base solida per dimostrare che un'argomentazione logica è necessariamente vera.

TAUTOLOGIE

- Le ovvietà
- Enunciati sempre veri e prescindere dalle premesse
- Facilmente individuabili tramite le tavole di verità

FORMULE COMPLESSE

- Gli operatori (connettivi) possono essere combinati in formule anche molto complesse
- Uso delle parentesi e priorità degli operatori (come in aritmetica)
- Esempio:
  - P = "oggi piove"
  - Q = "oggi fa caldo"
  - La formula "$P \land \neg Q$" è vera quando piove e non fa caldo

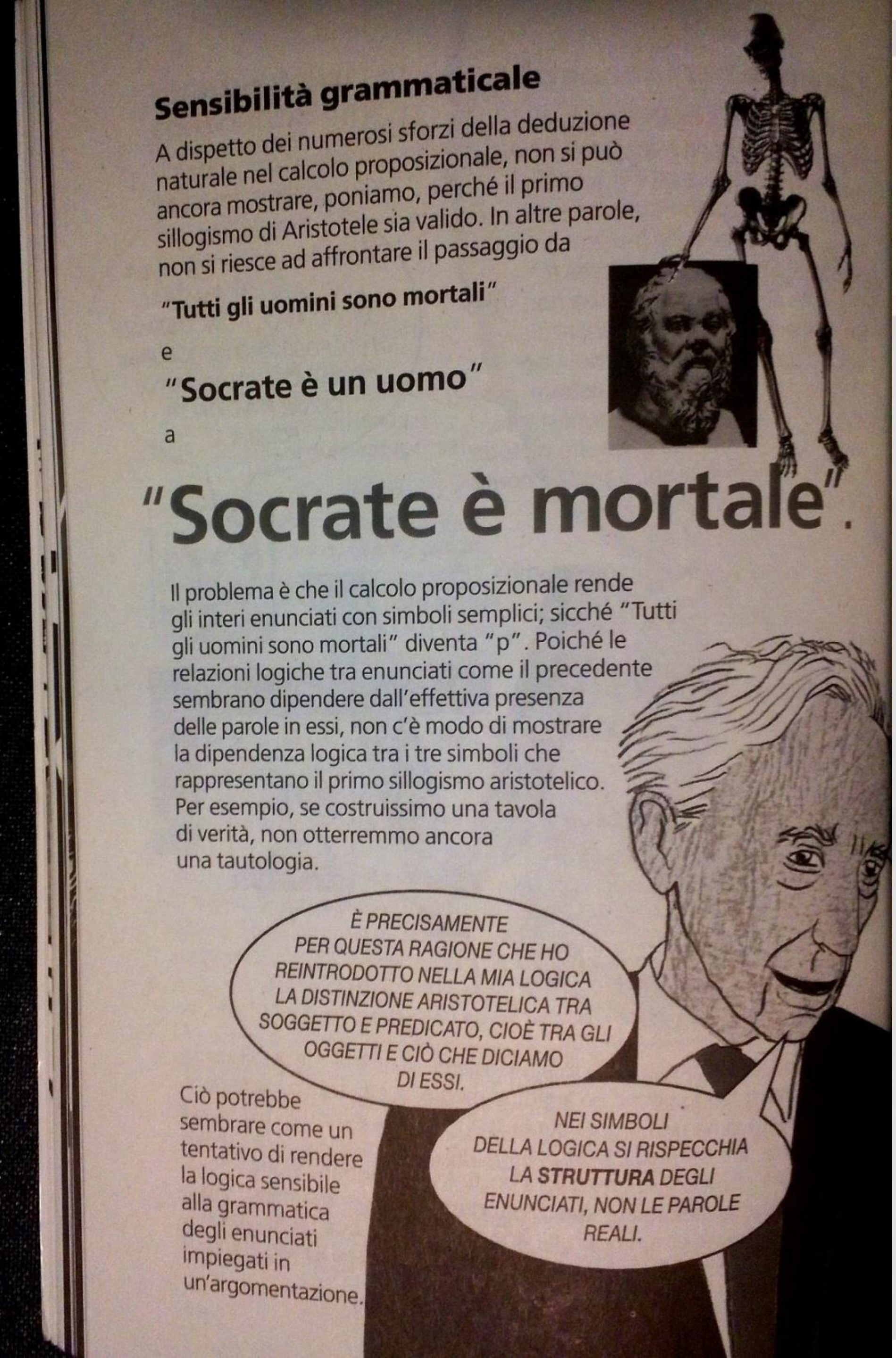
P	Q	$P \land \neg Q$
F	F	F
F	V	F
V	F	V
V	V	F

IMPLICAZIONE

- L'implicazione di p e q è rappresentata come $p \rightarrow q$
- Significato: Se p è vera allora q dev'essere vera. Quando p è falsa q può assumera qualsiasi valore (non possiamo dire nulla di q)
- Corrisponde a: ¬p v q

P	Q	P → Q
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

- **P = «oggi piove»**
- **Q = «è umido»**
- **Quando piove sicuramente è umido, quindi non può essere che piova e non sia umido!**


Sensibilità grammaticale

A dispetto dei numerosi sforzi della deduzione naturale nel calcolo proposizionale, non si può ancora mostrare, poniamo, perché il primo sillogismo di Aristotele sia valido. In altre parole, non si riesce ad affrontare il passaggio da

"Tutti gli uomini sono mortali"

e

"Socrate è un uomo"

a

"Socrate è mortale".

Il problema è che il calcolo proposizionale rende gli interi enunciati con simboli semplici; sicché "Tutti gli uomini sono mortali" diventa "p". Poiché le relazioni logiche tra enunciati come il precedente sembrano dipendere dall'effettiva presenza delle parole in essi, non c'è modo di mostrare la dipendenza logica tra i tre simboli che rappresentano il primo sillogismo aristotelico. Per esempio, se costruissimo una tavola di verità, non otterremmo ancora una tautologia.

È PRECISAMENTE PER QUESTA RAGIONE CHE HO REINTRODOTTO NELLA MIA LOGICA LA DISTINZIONE ARISTOTELICA TRA SOGGETTO E PREDICATO, CIOÈ TRA GLI OGGETTI E CIÒ CHE DICIAMO DI ESSI.

Ciò potrebbe sembrare come un tentativo di rendere la logica sensibile alla grammatica degli enunciati impiegati in un'argomentazione.

NEI SIMBOLI DELLA LOGICA SI RISPECCHIA LA **STRUTTURA** DEGLI ENUNCIATI, NON LE PAROLE REALI.

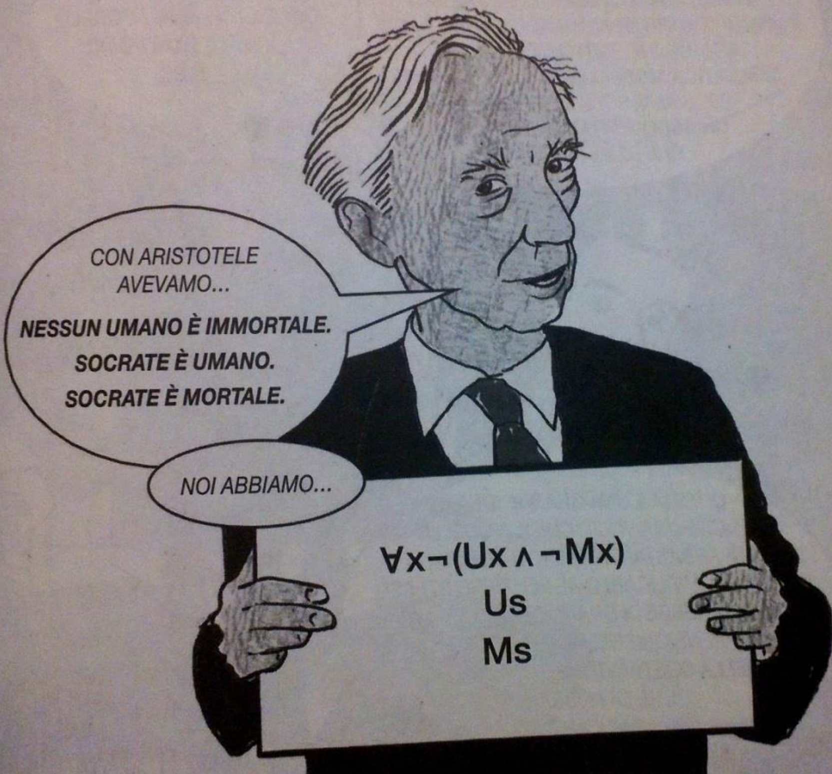
LIMITI DELLA LOGICA DELLE PROPOSIZIONI

- La logica delle proposizioni è limitata nel suo carattere espressivo
- Non possiamo modellare concetti quali "alcuni sono poveri", "qualcuno ama Elisa", "nessuno è perfetto"
- Problema di base: non si possono collegare "parti" delle varie proposizioni:
  - "uomo" e "mortale" nel sillogismo di Aristotele

Il calcolo dei predicati

Nel calcolo dei predicati di Russell le lettere minuscole stanno per oggetti: più precisamente, **a**, **b**, **c**, ... stanno per oggetti che hanno un nome specifico, e **x**, **y**, **z** stanno per oggetti non ancora specificati. Le lettere maiuscole stanno per predicati.

Russell usa anche dei simboli particolari per rappresentare i quantificatori: "**∀x**" sta per "**ogni x**" e "**∃x**" sta per "**esiste almeno un x**". Tutti gli altri connettivi si comportano come nel calcolo proposizionale. Se disponiamo di questo apparato, possiamo dar conto di ogni possibile sillogismo.



Possiamo dimostrare questo sillogismo usando una versione estesa delle regole di introduzione ed eliminazione del calcolo proposizionale. Sfortunatamente, non possiamo però costruire delle tavole di verità per controllare le formule predicative, poiché le tavole non sono in grado di catturare la relazione tra la verità di enunciati generali e la verità di enunciati che cadono sotto di essi.

CALCOLO DEI PREDICATI

- Russell reintroduce la distinzione aristotelica tra soggetto e predicato nel suo calcolo dei predicati
- Rappresenta le basi per la "Logica del primo ordine"

QUANTIFICATORE UNIVERSALE

- Il **quantificatore universale** si indica con il simbolo ∀ e si legge «per ogni»
- Quindi la scrittura:

$$\forall x \in A$$

- si legge «per ogni x appartenente all'insieme *A*»
- Se *Fx* è una proposizione logica (es: F=«è felice», F=«è giovane», F=«è piovoso», etc.), l'enunciato ∀x *Fx* è vero se e soltanto se *Fx* assume valore vero per ogni x appartenente all'insieme *A*
- Esempio: «Tutti i siciliani sono felici»
  - F = «è felice», A = «insieme dei siciliani»
  - Il predicato ∀x ∈ A *Fx* risulta vero se in effetti tutti i siciliani sono felici (ne basta uno non felice per rendere falso il predicato)

QUANTIFICATORE ESISTENZIALE

- Il **quantificatore esistenziale** si indica con il simbolo ∃ e si legge «esiste»
- La scrittura

  $\exists x \in A$

- si legge «esiste x appartenente all'insieme *A*»
- Se *Fx* è una proposizione logica, l'enunciato $\exists x \in A$ *Fx* è vero se e soltanto se *Fx* assume valore vero per qualche (almeno uno) x appartenente all'insieme *A*
- Esempio: «Alcuni siciliani sono ricchi»
  - F = «è ricco», A = «insieme dei siciliani»
  - Il predicato $\exists x \in A$ *Fx* assume valore Vero se almeno un siciliano è ricco.

SIMBOLI NEL CALCOLO DEI PREDICATI

- Il linguaggio delle logica dei predicati è costituito dall'*alfabeto* e dall'insieme delle *formule ben formate*
- L'***alfabeto*** della logica dei predicati è costituito da:
  - (a) costanti individuali: *a*, *b*, *c*,.... Massimo, Elisa, Catania, ...
  - (b) variabili individuali: *x*, *y*, *z*,... Si riferiscono ad un soggetto qualsiasi
  - (c) costanti predicative: *P*, *Q*, *R*,... Felice, Ricco, Piove, Vola, Rosso, Nero
  - (d) simboli per i connettivi proposizionali: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$
  - (e) simboli per i quantificatori universale ed esistenziale: $\forall$ (per ogni) e $\exists$ (esiste)
  - (f) parentesi aperta e chiusa: (e)
- Formalismo molto potente
- Non si possono utilizzare le tavole di verità in quanto non è possibile rappresentare tutte le istanze possibili

ESEMPI

- La proposizione “Elisa ama Massimo” si può formalizzare, ad esempio, con *Rab*
  - dove *R* indica la relazione **binaria** di “amare”
  - *a* sta per “Elisa”
  - *b* per “Massimo ”
- Le relazioni possono anche essere **unarie**, ad esempio: “ricco”, “giovane”, etc.
- Esempio
  - *Se R* sta per “è ricco” e *a* sta per “Giovanni”
  - *Ra* indica «Giovanni è ricco»
  - *Rx* indica «x è ricco»

ESEMPI 1

- a = «Elisa», b = «Massimo», R = «ama»
- Le proposizioni:
  - (1) “Vi è qualcuno che ama Massimo”
  - (2) “Tutti amano Massimo”
  - (3) “Vi è qualcuno che Elisa ama”
  - (4) “Elisa ama tutti”
  - (5) “Tutti sono amati da qualcuno
  - (6) “Tutti amano qualcuno”
  - (7) “Vi è qualcuno che ama tutti”
  - (8) “Tutti amano se stessi”
- si formalizzano rispettivamente come segue:
  - ?????

ESEMPI 1 (SOLUZIONI)

- a = «Elisa», b = «Massimo», R = «ama»
- Le proposizioni:
  - (1) “Vi è qualcuno che ama Massimo”
  - (2) “Tutti amano Massimo”
  - (3) “Vi è qualcuno che Elisa ama”
  - (4) “Elisa ama tutti”
  - (5) “Tutti sono amati da qualcuno
  - (6) “Tutti amano qualcuno”
  - (7) “Vi è qualcuno che ama tutti”
  - (8) “Tutti amano se stessi”
- si formalizzano rispettivamente nel modo seguente:
- (1) $\exists x\, Rxb$ (2) $\forall x\, Rxb$ (3) $\exists y\, Ray$ (4) $\forall y\, Ray$
(5) $\forall y\, \exists x\, Rxy$ (6) $\forall x\, \exists y\, Rxy$ (7) $\exists x\, \forall y\, Rxy$ (8) $\forall x\, Rxx$

ESEMPI 2

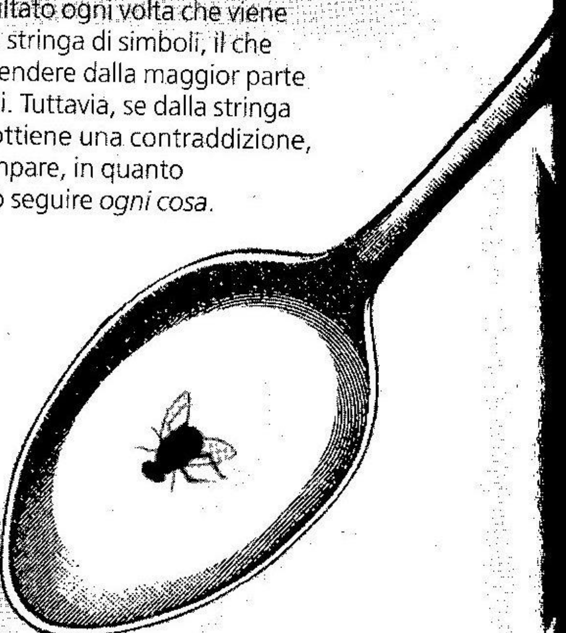
- a = «Elisa», b = «Massimo», c = «Sabrina», R = «ama»
- Le proposizioni:
  - (9) “Elisa non ama Massimo”
  - (10) “Elisa ama Massimo e Massimo non ama Elisa”
  - (11) “Se Elisa ama qualcuno, allora Elisa ama Massimo”
  - (12) “Massimo ama Elisa o Sabrina”
  - (13) “Tutti amano Massimo e Massimo non ama nessuno”
  - (14) “Qualcuno ama Elisa e qualcuno non ama Massimo”
- si formalizzano rispettivamente come segue:
  - ?????

ESEMPI 2 (SOLUZIONI)

- a = «Elisa», b = «Massimo», c = «Sabrina», R = «ama»
- Le proposizioni:
  - (9) "Elisa non ama Massimo"
  - (10) "Elisa ama Massimo e Massimo non ama Elisa"
  - (11) "Se Elisa ama qualcuno, allora Elisa ama Massimo"
  - (12) "Massimo ama Elisa o Sabrina"
  - (13) "Tutti amano Massimo e Massimo non ama nessuno"
  - (14) "Qualcuno ama Elisa e qualcuno non ama Massimo"
- si formalizzano rispettivamente come segue:
  - (9) $\neg Rab$ (10) $Rab \wedge \neg Rba$ (11) $\exists x Rax \rightarrow Rab$ (12) $Rba \vee Rbc$ (13) $\forall x Rxb \wedge \neg \exists y Rby$ (14) $\exists x Rxa \wedge \exists y \neg Ryb$

Il problema dei paradossi

Come molto altro in logica, la teoria della dimostrazione a prima vista sembra piuttosto arida e oscura. Spesso l'aspetto pratico delle sue applicazioni come metodo logico di prova sembra limitato. Tuttavia, forma lo scheletro di gran parte della nostra scienza, della matematica e della tecnologia del computer. Una delle virtù della teoria della dimostrazione è la capacità di garantire un singolo risultato ogni volta che viene applicata a una particolare stringa di simboli, il che è più di quanto si può pretendere dalla maggior parte degli esperimenti scientifici. Tuttavia, se dalla stringa di simboli in questione si ottiene una contraddizione, l'efficacia del metodo scompare, in quanto da una contraddizione può seguire *ogni cosa*.



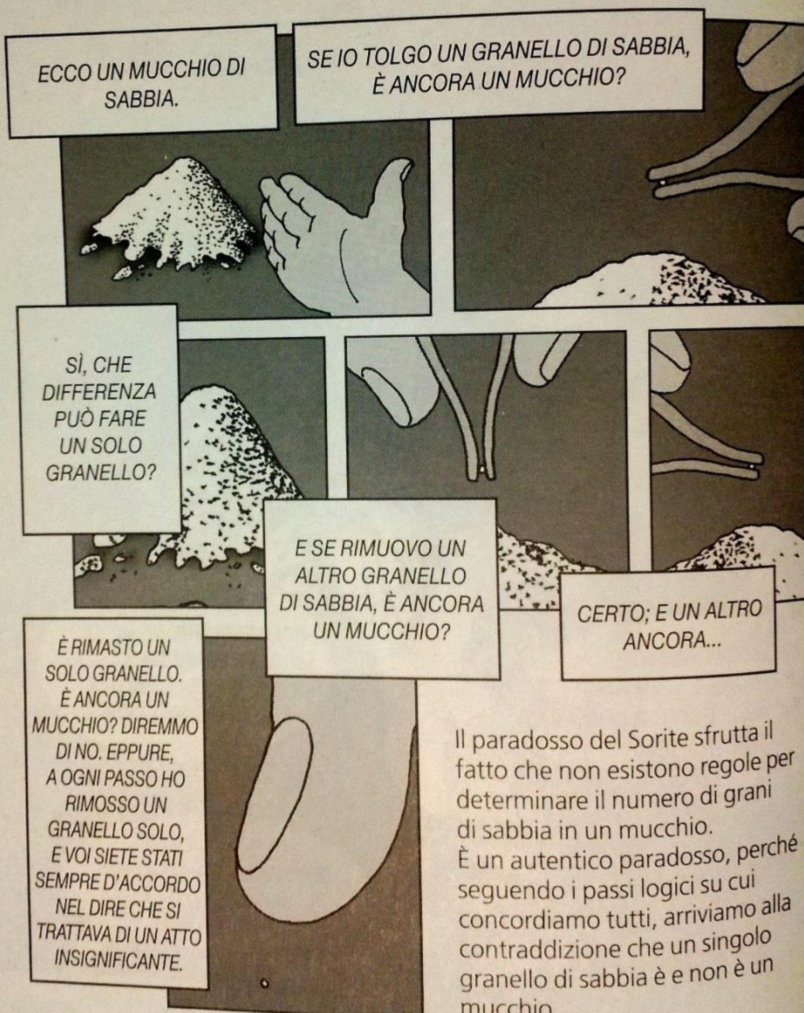
Un paradosso è un enunciato che implica la sua negazione. Per i logici rappresenta un incubo, perché, a prescindere dal fatto che l'enunciato sia vero o falso, si arriva sempre a una contraddizione. Ciò difficilmente si adatta alla legge di non contraddizione (nessun enunciato può essere contemporaneamente vero e falso). La parola *paradosso* ha origine greca. Vari scettici nell'antica Grecia volevano mostrare come la ragione non potesse portare a una conoscenza assoluta, e i paradossi erano la loro arma più comune. Il più famoso di questi filosofi (anche se non uno "scettico" nel senso stretto del termine) fu **Zenone di Elea** (ca. 495 - ca. 430 a.C.).

Questo enunciato è falso.

Il problema è che se l'enunciato è vero, allora è falso; ma se è falso, allora è vero. L'assumere che è sia vero sia falso porta ancora a una contraddizione. Questo è il più noto di una famiglia di paradossi, detti *dell'autoriferimento*. Sono chiamati così perché, in breve, l'enunciato parla di se stesso.

Quant'è un "mucchio"?

Un altro famoso paradosso, non di tipo autoreferenziale, è il cosiddetto *Sorite*, o paradosso del mucchio. Era caro a tutti quei pensatori che lo usavano per mostrare la debolezza della ragione. Si basa sul fatto che alcune parole nel nostro linguaggio, come "mucchio", sono vaghe. In certi casi non esistono regole nette per stabilire quando possano essere correttamente applicate.



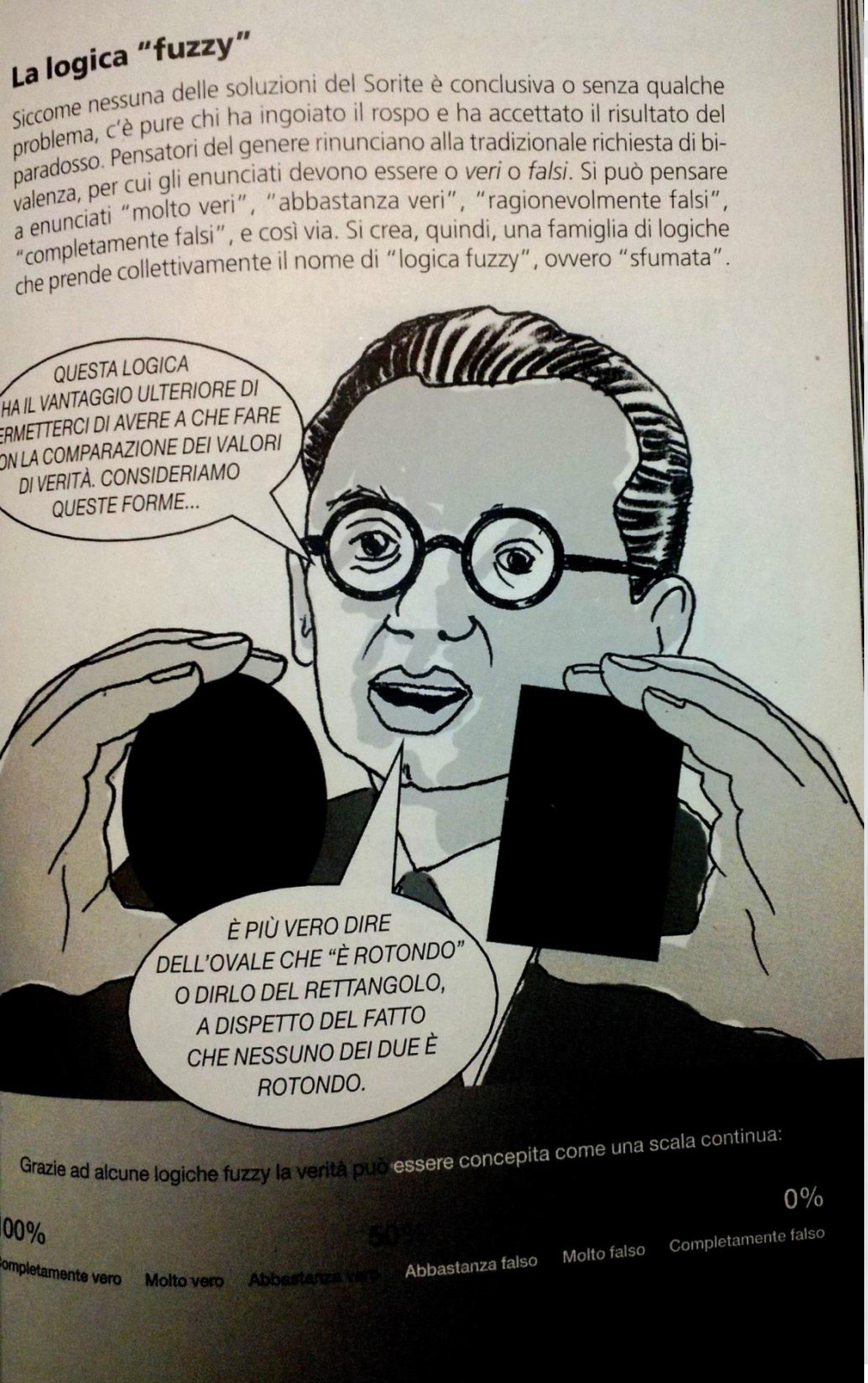
Il paradosso del Sorite sfrutta il fatto che non esistono regole per determinare il numero di grani di sabbia in un mucchio.
È un autentico paradosso, perché seguendo i passi logici su cui concordiamo tutti, arriviamo alla contraddizione che un singolo granello di sabbia è e non è un mucchio.

La soluzione di Tarski al Mentitore

Tarski pensò che la sua distinzione tra il linguaggio "sotto studio" e il "metalinguaggio" potesse dar conto con semplicità anche del Mentitore; infatti, "è vero" e "è falso" sono predicati che fanno parte del metalinguaggio.

Quando il Mentitore dice "Questo enunciato è falso", sta applicando il predicato "è falso" in maniera scorretta: lo tratta come parte del linguaggio oggetto. Ma lo si può usare solo nel *metalinguaggio*.

Questa soluzione è simile a quella di Russell, nel senso che non permette a enunciati dello stesso tipo di parlare dei propri valori di verità. Proprio come nella teoria di Russell esistono infiniti tipi, così nella proposta di Tarski esistono linguaggi per studiare linguaggi, per studiare il metalinguaggio, e così via, all'infinito.



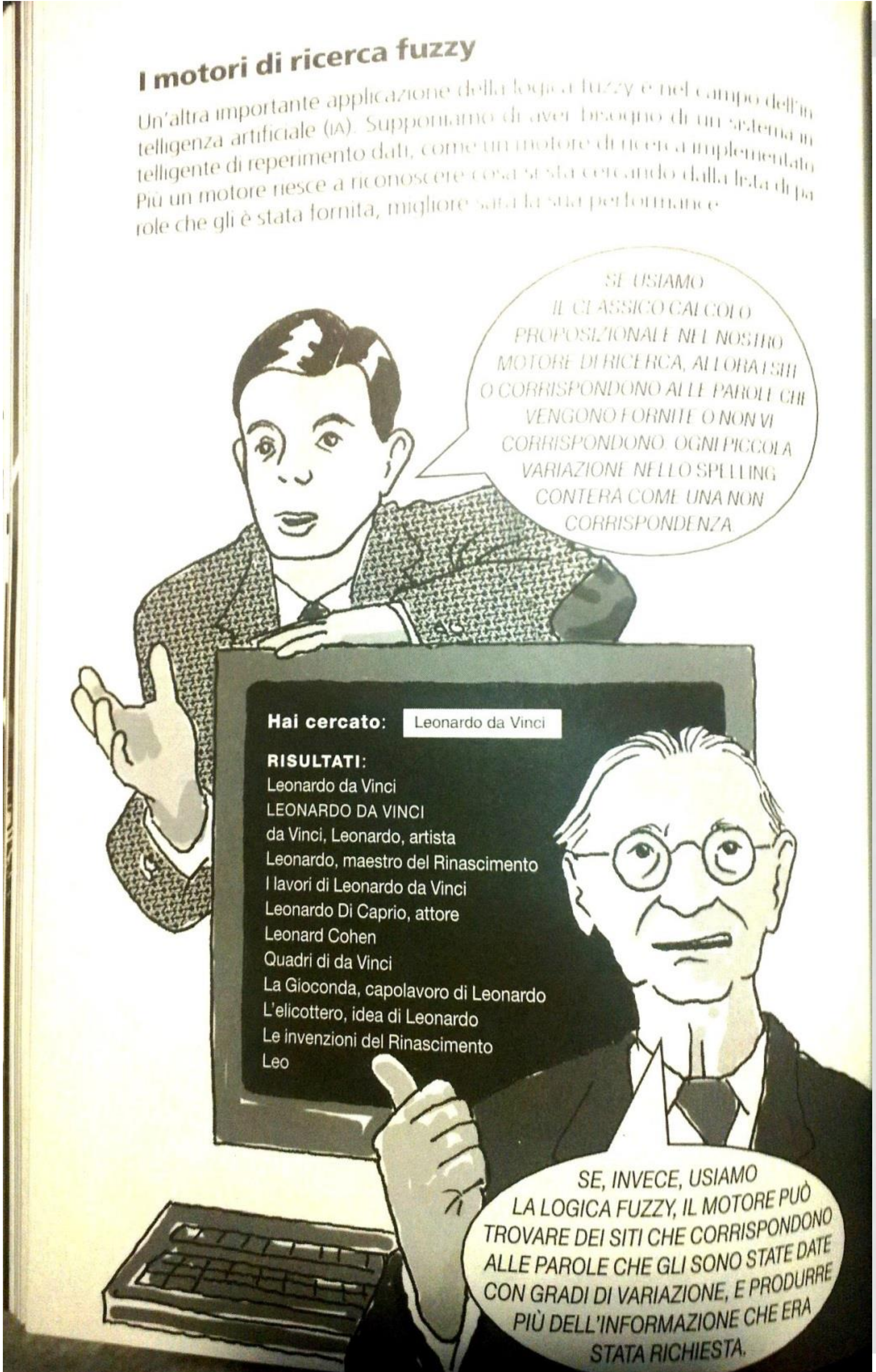
La logica "fuzzy"

Siccome nessuna delle soluzioni del Sorite è conclusiva o senza qualche problema, c'è pure chi ha ingoiato il rospo e ha accettato il risultato del paradosso. Pensatori del genere rinunciano alla tradizionale richiesta di bivalenza, per cui gli enunciati devono essere o *veri* o *falsi*. Si può pensare a enunciati "molto veri", "abbastanza veri", "ragionevolmente falsi", "completamente falsi", e così via. Si crea, quindi, una famiglia di logiche che prende collettivamente il nome di "logica fuzzy", ovvero "sfumata".

Grazie ad alcune logiche fuzzy la verità può essere concepita come una scala continua:

FUZZY LOGIC

- Recentemente introdotta
- Le cose non sono mai del tutto vere/false
  - Molto vero
  - Piuttosto falso
  - etc
- Largamente utilizzata nel linguaggio comune



FUZZY LOGIC

- Adottata dai sistemi informatici recenti
  - Motori di ricerca
  - Correttori ortografici e semantici nei telefonini
  - Riconoscitori di immagini
  - Etc

PER INFO ANDATE A VEDERE…

WWW.QUIZZI.IT

“LOGItest”. La logica per le prove di ammissione ai corsi universitari, Alpha Test